Olimpíada Paraibana de Matemática 2025

OPM

Nível 3

Ensino Médio

Escola/Colégio	Série

Nome do professor responsável

Nome do aluno completo

Instruções para a prova:

1. Preencha atentamente todos os seus dados nos quadros acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
2. A duração da prova é de 3 horas. Ao terminar a prova entregue-a ao aplicador.
3. A prova pode ser feita a lápis ou caneta.
4. Cada questão vale vinte (20) pontos.
5. A solução de cada questão deve ser escrita de maneira organizada e legível. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
6. Todas as suas respostas devem ser justificadas. Respostas sem justificativas receberão uma pontuação inferior.
7. Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou qualquer fonte de consulta.
8. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador.
9. Não risque ou preencha o campo reservado para a correção da prova.
10. Lembre-se de assinar a lista de presença ao entregar a prova.
11. O não cumprimento de alguma destas regras implica na sua desclassificação.

ESPAÇO RESERVADO PARA A CORREÇÃO DA PROVA

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Total

Realização:

UEPB

INSTITUTO FEDERAL Paraíba

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO DA PARAÍBA

Apoio:

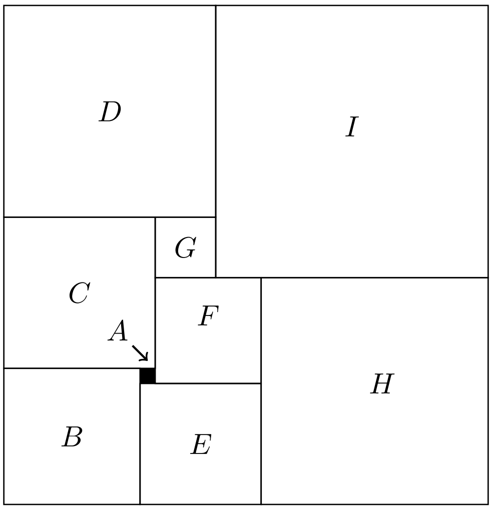
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA JOÃO PESSOA PREFEITURA

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

stone

Prova - Nível 3

1. (20 pontos) O retângulo da figura a seguir é dividido em quadrados A, B, C, D, E, F, G, H e I, em que o quadrado A (pintado de preto) tem o lado de menor medida e está indicado pela seta na figura. Sabendo que o lado do quadrado I mede 2025 mm, determine quanto mede o perímetro do quadrado A.



2. (20 pontos) Uma grande competição de matemática possui N questões, as quais são numeradas de 1 a N. Os organizadores adotaram o seguinte sistema de pontuação extra:

   - Cada questão acertada cuja numeração é múltipla de 5 concede **1 ponto extra**;
   - Se a numeração também for múltipla de 25, concede-se **mais 1 ponto extra**;
   - Se a numeração também for múltipla de 125, concede-se **mais 1 ponto extra**, e assim por diante: **uma questão correta de número m rende k pontos extras, onde k é o maior expoente para o qual 5^k divide m.**

   Por exemplo, se um competidor acertar a questão de número $25 = 5^2$, ele ganha **2** pontos extras (por ter numeração que é múltipla de 5 e 25). Se ele acertar a questão $250 = 2 \times 5^3$, ganha **3** pontos extras (por ter numeração que é múltipla de 5, 25 e 125). Neste contexto, pede-se:

   (a) Determine o maior número de pontos extras (acumulados) que um competidor poderá ganhar quando $N = 2025$;

   (b) Determine o menor valor de N tal que o total de pontos extras acumulados seja pelo menos 2025.

3. (20 pontos) Seja R uma região do plano que representa um conjunto de resultados possíveis. Neste contexto de probabilidade geométrica, consideramos que todos os pontos são equiprováveis, ou seja, possuem resultados igualmente possíveis. Se $A \subset R$ é um subconjunto que representa um evento desejado, então a probabilidade desse evento ocorrer é dada por

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } R}.$$

   Um ponto é escolhido ao acaso no quadrado $Q = [0, 4] \times [0, 4]$ do plano cartesiano xy. Qual a probabilidade de que o ponto escolhido satisfaça a condição

$$|x + y - 3| \leq |x - 1| \text{ ?}$$

4. (20 pontos) O Professor Wallace, nascido no sertão paraibano, recebeu como herança um antigo caderno de notas que pertencia ao seu trisavô, o viajante William Wallace da Costa. O caderno, datado de 1803, reunia relatos de caminhadas pelo Nordeste e também continha problemas matemáticos que o autor registrava à luz de lamparinas.

   Um desses problemas chamou particularmente sua atenção por trazer o curioso título Problema da Borboleta, cujo enunciado é o seguinte:

   "*Seja M o ponto médio de uma corda AB de um círculo. Por M, traçam-se duas outras cordas CD e EF tais que ED e CF se intersectam com AB em P e Q, respectivamente.*

   Demonstre que $PM = MQ$."

   Como o caderno não apresentava nenhuma demonstração desse resultado, **prove** que a conclusão do *Problema da Borboleta* é verdadeira.

5. (20 pontos) Dizemos que três números a, b, c, nessa ordem, formam uma **Progressão Aritmética (PA)** se $b - a = c - b$. Sejam a, b, c **inteiros positivos** que formam, nessa ordem, uma **PA** com $a < b < c$, e considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Dois números reais positivos r e s satisfazem as condições

$$rs = 2025, \qquad f(r) = s \qquad \text{e} \qquad f(s) = r.$$

   Determine todos os valores possíveis para o número a.